引入 p-模系统 (F, R, k)　　　$k = R/(\pi)$, F是R的分式域

F: 特征0　R: (完备)离散赋值环　k: 特征p

c-d-e三角

$$\begin{tikzcd} & G_0(FG) \arrow[dr, "d\ \text{分解映射}"] & \\ K_0(kG) \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "c", "\text{Cartan映射}"'] & & G_0(kG) \end{tikzcd}$$

$c = de$

$e:\ P_S \longmapsto \hat{P}_S \longmapsto F\otimes_R \hat{P}_S$　($\hat{P}_S$: RG-模)

$d:\ L \longmapsto$ RG-lattice $L_0 \longmapsto L_0/\pi L_0$

RG-lattice: (有限生成投射R-模) (自由)　　不唯一!

引理9.4.1 设R是离散赋值环(极大理想(π)), 商域 $k = R/(\pi)$。令G-有限群。

(1) 若S为单RG-模, 则 $\pi S = 0$。

(2) 单RG-模恰好是单kG-模(由$RG\to kG$产生);

(3) 对∀RG-模U, $\pi U \subseteq Rad(U)$。特别地 $\pi RG \subseteq Rad(RG)$;

(4) 对∀RG-模U, 有 $RadU/\pi U = Rad(U/\pi U)$。

证明: (1) 作为RG-模 πS 是S的(RG)子模。因此 $\pi S = 0$ 或 $\pi S = S$。作为R-模 有满同态 $S \to S/\pi S$。由Nakayama引理, 只能是 $\pi S = 0$。

(2) 直接由(1)得到。

(3) 若V为U的一个极大子模, 则 U/V 为单。从而 $\pi(U/V) = 0$, 即 $\pi U \subset V$。因此 $\pi U \subset Rad(U)$。

(4) 由定义, Rad U是U到各个单模的映射的核的交。所有这样的映射均通过 $U/\pi U$ 分解, 即

$$\begin{tikzcd} Ker\alpha \arrow[r, hook] & U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & S \\ & U/\pi U \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

于是 Rad U是 $U/\pi U$ 的根基的原像。由此可得 $RadU/\pi U \cong Rad(U/\pi U)$。

推论9.4.2 R, k, G如上。设P, Q为有限生成投射RG-模。则 $P \cong Q$

当且仅当 $P/\pi P \cong Q/\pi Q$（作为kG-模）。

证明 设 $P/\pi P \cong Q/\pi Q$。由 9.4.1 (4) $\mathrm{Rad}\,P/\pi P \cong \mathrm{Rad}(P/\pi P)$ 可得

$$\left(\frac{P/\pi P}{\mathrm{Rad}P/\pi P} \cong\right) P/\mathrm{Rad}P \cong Q/\mathrm{Rad}Q 。$$

因为 P,Q 是同一半单（$\underline{RG}$-或kG-）模的投射盖，所以 $P \cong Q$。

<u>命题 9.4.3</u> 设R为完备离散赋值环，$k=R/(\pi)$，G有限。则kG中每个单位元的正交分解 $1=e_1+e_2+\cdots+e_n \in kG$ 存在一个提升

$$1=\hat{e}_1+\hat{e}_2+\cdots+\hat{e}_n \in RG 。$$

后者也是正交分解。满足 $\hat{e}_i+(\pi)RG=e_i$，且 $\hat{e}_i$ 为本原当且仅当 e_i 为本原。

证明：对 $\forall n\geq 2$，考虑自然映射 $[R/(\pi^n)]G \to [R/(\pi^{n-1})]G$

$$[R/(\pi^{n-1})]G = [R/(\pi^n)]G \Big/ (\pi^{n-1})G/\pi^n G$$

$$\begin{tikzcd} & f_i\in RG \arrow[dl] \arrow[dr, two heads] & \\ {[R/(\pi^2)]G} \arrow[rr, two heads] & & {[R/(\pi)]G \ni e} \end{tikzcd}$$

而 $(\pi^{n-1})G/\pi^n G$ 为幂零理想。

对于幂等元 $e\in kG$，取 $f_1\in RG$，使得 $f_1+(\pi)G=e$。同时 e 在 $[R/(\pi^2)]G$ 中存在提升 $e_{(2)}$，使得 $e_{(2)}+(\pi)G=e$。取 $f_2\in RG$ 满足 $f_2+(\pi^2)G=e_{(2)}$。以此类推产生 $f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots \in RG$。验证它为柯西列。

<u>命题 9.4.5</u> R完备，k，G同上。则有

(1) 对 $\forall$ 单RG-模S，存在唯一不可分解投射模 $\hat{P}_S$ 为其投射盖，且 $\hat{P}_S=RG\hat{e}_S$。此处 $\hat{e}_S$ 为RG的本原幂等元满足 $\hat{e}_S S\neq 0$

(2) kG-模 $\hat{P}_S/\pi\hat{P}_S \cong P_S$ 是 S（作为kG-模）的投射盖，$\hat{P}_S$ 是 P_S 作为RG-模的投射盖。对单kG-模S和T，$\hat{P}_S\cong\hat{P}_T \iff S\cong T$。

(3) 每个有限生成RG-模具有投射盖。

(4) 每个有限生成不可分解投射RG-模均同构于某个 $\hat{P}_S$。

(5) 每个有限生成投射kG-模可以提升到一个RG-格。这样的提升是在同构意义下唯一，且必为投射。相应地，一个RG-格 L 为投射 $\iff$ $L/\pi L$ 为投射kG-模。投射RG-模 $L_1\cong L_2$

当且仅当 $L_1/\pi L_1 \cong L_2/\pi_2 L$ (作为kG-模)。

本原

证明. (1) 取 $e_S\in kG$ 使得 $e_S S\neq 0$. 令 $\hat{e}_S$ 为 e_S 的提升. 则由提升的构造可知 $\hat{e}_S S = e_S S\neq 0$. 定义 $\hat{P}_S = RG\hat{e}_S$, 为不可分解投射 RG-模. 又由 $\hat{P}_S/\pi\hat{P}_S = kGe_S$ 是 S (作为kG-模) 的投射盖, 可知 $\hat{P}_S$ 是 S (作为RG-模) 的投射盖.

(2) 将 $P_S = kGe_S$ 看作 RG-模, 有满射 $\hat{P}_S\twoheadrightarrow P_S$ (不可能存在 $\hat{P}_S$ 的真子模满射到 P_S 上), 即 $\hat{P}_S$ 是 P_S 的投射盖.

(3) 设 U 是有限生成 RG-模. 则 $U/\mathrm{Rad}U$ 为有限生成 kG-模. 假设 $U/\mathrm{Rad}U\cong S_1\oplus\cdots\oplus S_t$. 对每个 S_i, 构造 $P_i = kGe_i$ 及 $\hat{P}_i = RG\hat{e}_i$. 有

$$\begin{tikzcd}
& \hat{P}_1\oplus\cdots\oplus\hat{P}_t \ \text{投射} \arrow[dl, dashed, "\exists f"'] \arrow[d, "\text{本质满}"] \\
U \arrow[r, "\text{本质满}"'] & U/\mathrm{Rad}U\cong S_1\oplus\cdots\oplus S_t
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ f 必为本质满, 即 $\hat{P}_1\oplus\cdots\oplus\hat{P}_t$ 为 U 的投射盖.

(4) 设 P 有限生成不可分解投射 RG-模. 由(3)可知它存在投射盖 $\alpha:\hat{P}_1\oplus\cdots\oplus\hat{P}_t\to P$. 因为 P 投射, 所以存在 $\beta: P\to\hat{P}_1\oplus\cdots\oplus\hat{P}_t$ 使得 $\alpha\beta=1_P$. 由于 α 和 1_P 为本质满, 所以 β 必是. 于是 $t=1$.

(5) 设 L 为 RG-格且 $L/\pi L$ 为投射. 于是 $L/\pi L\cong P_S$. 考虑 S 作为 RG-模的投射盖 $\hat{P}_S$. 由 $\pi L\subset\mathrm{Rad}L$, 所以 $\hat{P}_S\to S$ 可分解为 $\hat{P}_S\to L\to S$. 由于 $\hat{P}_S\to S$ 及 $L\to S$ 为本质满, 所以 $\hat{P}_S\to L$ 必是. 注意到 $\hat{P}_S$ 与 L 具有相同的 R-秩, 可知 $\hat{P}_S\cong L$.

设 U 为 FG-模, U_0 为 RG-格且 $U_0\subset U$. 如果 U_0 的一组 R-基必是 U 的 F-基, 那么称 U_0 为满RG-格(full): $U=F\otimes_R U_0$, 也称 U_0 为 U 的一个R-形式. (R-form)

引理9.4.6 设 R 为 PID, F 为分式域, U 为有限维 F-线性空间. 若 U 的任意有限生成 R-子模 U_0 包含 U 的一个 F-基, 则 U_0 是 U 的一个满格.

证明: 假设 U_0 满足条件. 由于 U 为 R 上无扭模, U_0 必是自由且 $U_0\cong R^n$. 取 U_0 的一组 R-基 $\{x_1,\cdots,x_n\}$. 因为 U_0 包含 U 的一个 F-基, 所以 $U=F\{x_1,\cdots,x_n\}$. 下证 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为 F-线性无关. 令

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=0,\quad \lambda_i\in F.$$

设 $\lambda_i = \frac{a_i}{b_i}$ ($a_i, b_i \in R$)。于是由

$$(\prod b_i)(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = 0 = \underbrace{(\prod b_i)\lambda_1}_{在R中} x_1 + \cdots + \underbrace{(\prod b_i)\lambda_n}_{在R中} x_n = 0$$

可得 $(\prod b_i)\lambda_j = 0$，$\forall j = 1, \cdots, n$，即 $\lambda_j = 0$。

推论 9.4.7 设 R，F 如上，而 U 为有限维 FG-模。则存在一个 RG-格 U_0 为 U 的 R-形式。

证明：取 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 为 U 的一组 F-基，并令 U_0 为 U 的 R-子模，由以下元素张成 $\{gu_i \mid i = 1, \cdots, n, g \in G\}$。这是 U 的一个有限生成 R-子模，且包含 U 的一组 F-基。由上述引理，这是 U 的一个满格。

定理 9.4.8 (Brauer-Nesbitt) 设 (F, R, k) 为 p-模系统，G 为有限群，U 为有限生成 FG-模。令 L_1，L_2 为 U 中满 RG-格。则 $L_1/\pi L_1$ 和 $L_2/\pi L_2$（作为 kG-模）具有相同的合成因子。

证明：第一步：注意到 $L_1 + L_2$ 仍为 U 中满 RG-格。于是只需分别比较 $L_1 \subseteq L_1 + L_2$ 及 $L_2 \subseteq L_1 + L_2$。以下假设 $L_1 \subseteq L_2$。

第二步：由于 L_1，L_2 具有相同的 R-秩，所以 L_2/L_1 为扭模。因为 L_2/L_1 作为 R-模具有合成列，从而作为 RG-模也存在合成列。于是可假设 L_1 为 L_2 的极大 RG-子模。

第三步：由于 L_2/L_1 为单 RG-模，所以 $\pi L_2 \subseteq L_1$。考虑

$$\underbrace{L_2 \supseteq L_1 \supseteq \pi L_2}_{L_2/\pi L_2} \supseteq \pi L_1 \qquad \overbrace{L_1 \supseteq \pi L_2 \supseteq \pi L_1}^{L_1/\pi L_1}$$

只需证明 $L_2/L_1 \cong \pi L_2/\pi L_1$：考察 $L_2 \longrightarrow \pi L_2/\pi L_1$

$$x \longmapsto \pi x + \pi L_1$$

它是满同态，且核为 L_1。

分解矩阵 D：行指标为单 FG-模，列指标为单 kG-模

$$d_{TS} = S \text{ 在 } T_0/\pi T_0 \text{ 中的重数}$$

c-d-e 三角

$$G_0(FG)$$

c-d-e 三角

$$\begin{tikzcd} & G_0(FG) \arrow[dr, "d"] & \\ K_0(kG) \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "c"'] & & G_0(kG) \end{tikzcd}$$

命题: $c = de$

证明: 令 P_S 为不可分解投射 kG-模。则

$$e([P_S]) = [F \otimes_R \hat{P}_S]$$

且 $d([F\otimes_R \hat{P}_S]) = [\hat{P}_S/\pi\hat{P}_S] = c([P_S])$。 (取 $\hat{P}_S$ 为所需满 RG-格)

← Cartan矩阵中元素

注: $[P_W] = \sum_{\text{单}kG\text{-模}S} c_{SW}[S]$。

命题9.5.2 令 (F,R,k) 为 p-模系统。令 U, V 为 FG-模,分别包含满 RG-格 U_0 和 V_0。

(1) $\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0)$ 为 $\mathrm{Hom}_{FG}(U,V)$ 中的一个满(R-)格。

(2) $\pi\,\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0) = \mathrm{Hom}_{RG}(U_0,\pi V_0) \subseteq \mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0)$。

(3) 如果 U_0 为投射 RG-模,则

$$\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0)/\pi\,\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0) \cong \mathrm{Hom}_{RG}(U_0, V_0/\pi V_0)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{kG}(U_0/\pi U_0, V_0/\pi V_0).$$

证明:(1) 首先要说明 $\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0) \subseteq \mathrm{Hom}_{FG}(U,V)$. 取 U_0, V_0 的各一组 R-基(可假定它们也是 U, V 的 F-基),则任意 RG-模同态 $U_0\to V_0$ 可自动(且唯一地)产生一个 FG-模同态 $U\to V$. (U_0 的基 $\{u_1,\dots,u_r\}$, V_0 的基 $\{v_1,\dots,v_s\}$)

由于 $\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0) \subseteq \mathrm{Hom}_R(U_0,V_0) \cong R^{rs}$ ($r = \mathrm{rk}(U_0)$, $s=\mathrm{rk}(V_0)$)

及 R 为PID,所以 $\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0)$ 为自由 R-模(即 R-格)。

取 FG-模同态 $\phi: U\to V$。则 $\phi(u_i) = \sum \lambda_{ji} v_j$, $\lambda_{ji}\in F$。存在 $a\in R$ 使得 $a\lambda_{ji}\in R$, $\forall i,j$。于是 $a\phi: U_0 \to V_0$ 为 RG-模同态。从而 $\mathrm{Hom}_{FG}(U,V) = F\otimes_R \mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0)$,即 $\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0)$ 为 $\mathrm{Hom}_{FG}(U,V)$ 的满格。

(2) 首先,$V_0 \to \pi V_0$ ($x\mapsto \pi x$) 为 RG-同构。其次,任意 RG-模同态 $U_0\to\pi V_0$ 可分解为 $U_0\to V_0\to \pi V_0$,恰好是 $\pi\,\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0)$ 中元素。

(3) 考虑 $\tau: \mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0) \xrightarrow[\text{诱导}]{\text{自然}} \mathrm{Hom}_{RG}(U_0, V_0/\pi V_0)$ (R-模同态)

其核为 $\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,\pi V_0)=\pi\mathrm{Hom}_{RG}(U_0,V_0)=\ker\tau$

由于 U_0 为投射，所以 τ 为满同态 $\left(\begin{tikzcd} & U_0 \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\ V_0 \arrow[r] & V_0/\pi V_0 \end{tikzcd}\right)$

考虑 RG-模同态 $\alpha: U_0\to V_0/\pi V_0$。由 $\ker\alpha\supseteq\pi U_0$，可知

可分解为 $U_0\to U_0/\pi U_0\xrightarrow{\tilde\alpha}V_0/\pi V_0$。。这给出第二个同构。

推论 9.5.3 U,V,U_0,V_0 假设同上，且 U_0 为投射 RG-格。则

$$\dim_F\mathrm{Hom}_{FG}(U,V)=\dim_k\mathrm{Hom}_{kG}(U_0/\pi U_0,V_0/\pi V_0)$$

定理 9.5.4 令 (F,R,k) 为分裂 p-模系统（对 G），并假设 R 为完备。

(1) 若 S 为单 kG-模，T 为单 FG-模（包含满 RG-格 T_0），则

T 在 $F\otimes_R\hat{P}_S$ 中的重数等于 S 在 $T_0/\pi T_0$ 中的重数。

(2) 在 $G_0(FG)$，$G_0(kG)$ 和 $K_0(kG)$ 的"自然基"下，e 的矩

阵为 D 而 d 的矩阵为 D^T（D 为分解矩阵）。

证明：(1) $\dim_F\mathrm{Hom}_{FG}(F\otimes_R\hat{P}_S,T)=\dim_k\mathrm{Hom}_{kG}(P_S,T_0/\pi T_0)$ （相应的 RG-格为 $\hat{P}_S$，投射）

等于 $\dim_F\mathrm{End}_{FG}(T)$ 乘以重数　　　等于 $\dim_k\mathrm{End}_{kG}(S)$ 乘以重数

‖　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　‖

1 ←―― 分裂域 ――→ 1

(2) 完全从 e，d 及 D 的定义出发可得。

推论 9.5.6 (F,R,k) 假定如上，则 Cartan 矩阵 $C=D^TD$，为对称。

$$c: K_0(kG)\longrightarrow G_0(kG)$$

假设 $c\left(\sum_i\lambda_i[P_{S_i}]\right)=0$，$\lambda_i\in\mathbb{Z}$

‖

$c([P]-[Q])=0$　　　$2[P_1]+5[P_2]=[P_1^2\oplus P_2^5]$

P、Q 为两个投射 kG-模

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}P, Q\ \text{有相同的合成因子}\\ +\\ \text{Brauer特征标}\end{array}\right\}\Rightarrow P\cong Q\Rightarrow \operatorname{Ker} c=0$$